

Bài 3. Định lý Ô-le - Định lý Phéc-ma

A. Tóm tắt lý thuyết

3.1. Định lý Ô-le

Cho m là một số nguyên dương và a là một số nguyên tố với m . Khi đó $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

3.2. Định lý Phéc-ma (hệ quả của định lý Ô-le)

Cho p là một số nguyên tố và a là số nguyên không chia hết cho p . Khi đó $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

3.3. Ứng dụng

Nếu a là một số tự nhiên với sự phân tích tiêu chuẩn $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ thì số tự nhiên d là ước của a khi và chỉ khi d có dạng $d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_n^{\delta_n}$ với $0 \leq \delta_i \leq \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Nếu $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i \geq 0$; $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$, $\beta_i \geq 0$ thì

$$\text{ƯCLN}(a, b) = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_n^{\delta_n}, \quad \delta_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\};$$

$$\text{BCNN}(a, b) = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \dots p_n^{\mu_n}, \quad \mu_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}.$$

B. Một số dạng bài toán thường gặp

Dạng 1. Chứng minh chia hết

Phương pháp:

- Sử dụng định lý Ô-le và định lý Phéc-ma

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu a nguyên tố với 7 thì $a^{12} - 1$ chia hết cho 7.

Giải

Vì a nguyên tố với 7 nên theo định lý Ô-le ta có:

$$a^{\varphi(7)} \equiv a^6 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Từ đó

$$a^{12} \equiv 1 \pmod{7}.$$

Vậy $a^{12} - 1$ chia hết cho 7.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng: $2^{70} + 3^{70} : 13$.

Giải

Do $\text{ƯCLN}(2, 13) = 1$ nên theo định lý Ô-le $2^{\varphi(13)} = 2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.

Từ đó

$$2^{70} = (2^{12})^5 \cdot 2^{10} \equiv 2^{10} \equiv (2^4)^2 \cdot 2^2 \equiv 3^2 \cdot 2^2 \equiv -3 \pmod{13}.$$

Ta cũng có $\text{ƯCLN}(3, 13) = 1$ nên $3^{\varphi(13)} = 3^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.

$$\text{Từ đó } 3^{70} \equiv 3^{10} \equiv (3^3)^3 \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{13}.$$

Vậy $2^{70} + 3^{70} \equiv 0 \pmod{13}$ hay $2^{70} + 3^{70} : 13$.

Dạng 2. Tìm số dư

Phương pháp:

- Sử dụng định lý Ô-le và Phéc-ma

Ví dụ 1. Tìm số dư trong các phép chia: 6^{592} chia cho 11.

Giải

Theo môđun 11 ta có $6^{592} \equiv 36^{296} \equiv 3^{296} \pmod{11}$.

Theo định lý Ô-le $3^{\varphi(11)} = 3^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 3^{296} \equiv 3^6 \equiv 27^2 \equiv 3 \pmod{11}$.

Vậy số dư trong phép chia 6^{592} cho 11 là 3.

Ví dụ 2. Tìm số có hai chữ số tận cùng bên phải khi viết các số sau đây trong hệ thập phân: 3^{517} .

Giải

Ta tìm số dư trong phép chia 3^{517} cho 100.

Trước hết $\text{UCLN}(3, 100) = 1$ và $\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = 40$
nên

$$3^{\varphi(100)} = 3^{40} \equiv 1 \pmod{100}.$$

Theo môđun 40 ta có

$$5^2 \equiv 25 \pmod{40}, 5^3 \equiv 5 \pmod{40} \Rightarrow 5^{17} \equiv (5^3)^5 \cdot 5^2 \equiv 5^7 \equiv 5^3 \equiv 5 \pmod{40}.$$

Suy ra

$$3^{5^{17}} = 3^{40k+5} \equiv 3^5 = 243 \equiv 43 \pmod{100}.$$

Vậy số có hai chữ số tân cùng bên phải khi viết số $3^{5^{17}}$ trong hệ thập phân là: 43.